

Analyse du comportement d'opérateurs de fusion basés sur la somme : du cadre commensurable au cadre incommensurable

Salem Benferhat

benferhat@cril.univ-artois.fr

Sylvain Lagrue

lagrue@cril.univ-artois.fr

Julien Rossit

rossit@cril.univ-artois.fr

Université Lille-Nord de France
CRIL-CNRS UMR 8081
Faculté des Sciences Jean Perrin
rue Jean Souvraz, SP18
62307 Lens France

Résumé :

Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature pour fusionner les croyances potentiellement conflictuelles d'agents. En particulier, lorsque les échelles utilisées par les agents (ou les sources) pour évaluer la pertinence de leurs informations sont commensurables, l'opérateur de fusion basé sur la somme jouit d'une certaine popularité. En effet, cet opérateur satisfait de nombreuses propriétés intuitives, en particulier celle de la majorité, et il adopte une attitude discriminante au moment de dériver ses conclusions.

Cet article étudie en profondeur une méthode également basée sur l'opérateur somme lorsque les agents ne possèdent pas d'échelle commune pour évaluer la fiabilité des différentes informations dont ils disposent. Cet opérateur peut être caractérisé au moyen d'un ensemble infini d'échelles compatibles, ce qui permet de restaurer la commensurabilité, ou en terme d'ordre de Pareto sur l'ensemble des mondes possibles. Puis nous étudions plus particulièrement des familles d'échelles compatibles afin de caractériser des opérateurs moins prudents. Enfin nous fournissons une analyse complète en terme de postulats de rationalité et de prudence des inférences de tous les opérateurs de fusions présentés dans cet article.

Mots-clés : Fusion de croyances, incommensurabilité, majorité, consensus

Abstract:

Different methods have been proposed in the literature for merging multiple and potentially conflicting informations. Sum-based operators offer a natural method for merging commensurable prioritized belief bases. Their popularity is due to the fact that they satisfy the majority property and they adopt a non cautious attitude in deriving plausible conclusions.

This paper analyses the sum-based merging operator when sources to merge are incommensurable, namely they do not share the same meaning of uncertainty scales. We first show that the obtained merging operator can be equivalently characterized either in terms of an infinite set of compatible scales, or by a well-known Pareto ordering on a set of models. We then study different families of compatible scales useful for merging process. This paper also provides a postulates-based analysis of our merging operators.

Keywords: Belief Merging, incommensurability, majority, consensus

1 Introduction

Confronter différents points de vue, malgré leurs incohérences et leurs incertitudes, afin de produire une image la plus complète possible du monde est l'objet même de la fusion de croyances. Ce problème de fusion d'informations survient dès qu'il faut prendre en compte des bases de données distribuées, des systèmes multi-agents ou tous les cas d'informations distribuées en général (le web restant l'exemple le plus frappant). Parmi les nombreux opérateurs qui ont été proposés dans la littérature pour la fusion d'informations incertaines (voir par exemple [9, 13, 14] ou encore [5, 10, 16]), toutes font l'hypothèse que les échelles d'évaluation de l'incertitude ou de la pertinence des informations est commune à toutes les sources. En d'autres termes, ces méthodes supposent que tous les poids, utilisés pour quantifier l'incertitude ou l'importance des formules, sont commensurables. Cette hypothèse de commensurabilité fait réellement sens lorsque, par exemple, les pondérations représentent une ressource monétaire, lorsqu'elles sont issues de protocole de notation ou encore lorsque les valeurs que prennent les poids ne sont pas trop éloignées les unes des autres. Cette hypothèse est d'autant plus nécessaire que les méthodes précitées s'appuient généralement sur des opérateurs d'agrégation. En particulier, l'opérateur de fusion basé sur la somme jouit d'une certaine popularité. En effet, cet opérateur satisfait de nombreuses propriétés intuitives, par exemple celle de la majorité, et il adopte une attitude discriminante au moment de dériver ses conclusions.

En revanche, l'hypothèse de commensurabilité est beaucoup trop forte lorsque les informations proviennent de sources réellement hétérogènes et qu'elles ne partagent pas d'échelle commune. On ne trouve que peu de travaux qui traitent

de ces problèmes dans le cadre de la fusion de croyance [2, 8], mais aucun d’entre eux ne traite du cas d’opérateurs de fusion basés sur la somme, opérateur qui servira de point de départ et de fil conducteur à l’ensemble de cet article.

Ainsi, nous présentons tout d’abord en section 3 une extension naturelle de l’opérateur de fusion basé sur la somme permettant de traiter des bases de croyance incommensurables. Cette extension utilise pour cela la notion d’échelles compatibles. Nous montrons également dans cette même section que ce type de fusion peut être caractérisé par un critère de Pareto sur les mondes possibles. Nous analysons ensuite dans la section 4 le comportement logique de ces opérateurs, que se soit dans le cas commensurable ou dans le cas incommensurable. À titre d’illustration, dans le cas incommensurable, l’opérateur basé sur la somme perd son caractère majoritaire et devient même indépendant à la majorité. En section 5, nous présentons différentes méthodes d’inférences basées sur des restrictions sur les ensembles d’échelles compatibles (par exemple en ne traitant que des transformations linéaires ou en bornant le plus haut poids possible). Nous analysons en particulier l’impact de ces différentes restrictions d’un point de vue de postulats de rationalité et de prudence pour les opérateurs de fusion induits. Nous montrons par exemple que limiter le poids le plus élevé permet de retrouver la propriété de majorité, tandis qu’il est impossible de satisfaire des propriétés de consensus et d’équité si l’on ne sélectionne qu’une seule échelle compatible. Enfin, la section 6 fournit une comparaison en terme de prudence et de productivité des relations d’inférence des différentes approches considérées tout au long de cet article.

Mais avant de développer l’ensemble de ces résultats en détail, nous rappelons dans la section suivante une méthode bien connue de fusion de base de croyance basée sur la somme, dans le cas commensurable, sur laquelle nous nous appuyerons dans la suite de l’article.

2 Fusion de croyances

Nous considérons dans cet article un langage propositionnel \mathcal{L} possédant un nombre *fini* de variables propositionnelles. L’ensemble Ω représente l’ensemble des interprétations associées au langage considéré et ω représente un élément de Ω . Les lettres grecques φ et ψ sont utilisées pour représenter des formules propo-

sitionnelles. La conséquence logique est notée \models , tandis que $Mod(\varphi)$ représente l’ensemble des interprétations satisfaisant φ (c’est à dire l’ensemble des interprétation $\omega \in \Omega$ telles que $\omega \models \varphi$). Les symboles \top et \perp représentent respectivement la tautologie et la contradiction.

2.1 Bases de croyance pondérées

Dans cet article, nous considérerons que chaque agent représente ses croyances, ainsi que la confiance qu’il a en chacune d’elles, au moyen d’un ensemble de formules pondérées. Les formules du langage \mathcal{L} sont l’expression logique des différentes informations qu’il possède et le poids associé représente la fiabilité, la certitude ou encore la vraisemblance de ces informations. Ces bases de croyance permettent ainsi à un agent de modéliser des informations incertaines et ordonnées.

Définition 1 (Base de croyance) Une base de croyance B_i est un ensemble de formules pondérées, $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})), j \in \{1, \dots, m_i\}\}$, avec $\varphi_{ij} \in \mathcal{L}$, et $R_{B_i}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{N}^*$.

Un couple $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$ signifie que pour l’agent i , la formule φ_{ij} a une priorité de $R_{B_i}(\varphi_{ij})$. Intuitivement, les formules associées aux poids les plus élevés sont les formules les plus crues pour un agent donné. Nous ne considérons ici que les entiers positifs. Cette représentation est intimement liée aux approches développées en théorie des possibilités [4] qui utilise l’intervalle $[0,1]$ au lieu des entiers, et dans les fonctions conditionnelles ordinales (OCF) qui quant à elles utilisent des ordinaux pour évaluer l’incertitude des informations [14, 17, 18].

De plus, nous notons B_i^* l’ensemble des formules contenues dans B_i , sans considérer les poids. Cet ensemble représente l’ensemble des croyances de l’agent, sans priorité. Si cet ensemble peut potentiellement être contradictoire, nous considérerons dans cet article que B_i^* est cohérent pour chaque agent.

Il est possible à partir d’une base de croyance de définir une relation de plausibilité sur l’ensemble des interprétations. On associera à une interprétation ω un poids $\kappa_{B_i}(\omega)$ tel que ce poids soit égal au poids de la formule la plus importante falsifiée par ω .

Définition 2 (κ -functions) Une κ -fonction κ_{B_i} associée à une base de croyance B_i est une fonction qui associe à chaque interprétation $\omega \in \Omega$ un entier $\kappa_{B_i}(\omega)$ tel que :

$$\kappa_B(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \omega \models \varphi_{ij}; \\ \max\{R_{B_i}(\varphi_{ij}) : \omega \not\models \varphi_{ij}, \\ & (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Contrairement aux poids sur les formules, plus le poids associé à une interprétation ω est petit, plus l'état du monde représenté par ω est vraisemblable pour l'agent. En particulier, les croyances courantes de l'agent sont représentées par l'ensemble des interprétations possédant le plus petit poids. C'est sur cet ensemble que l'agent s'appuiera pour fonder ses décisions.

Exemple 1 Considérons la base de croyance suivante : $B = \{(\neg a \vee b, 8), (a \vee b, 5), (a, 2)\}$. La Table 1 présente la κ -fonction κ_B associée à B . ω_3 est l'interprétation préférée. Elle représente donc les croyances courantes de l'agent.

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
ω_0	0	0	5
ω_1	0	1	2
ω_2	1	0	8
ω_3	1	1	0

TABLE 1 – Un exemple de κ -fonction

2.2 Fusion de croyances basée sur la somme

Lorsque plusieurs agents mettent en commun leurs croyances, celles-ci sont rarement cohérentes. Aussi l'objet de la fusion de croyances est de résoudre les conflits dans les croyances des agents afin d'obtenir une vision du monde plus précise que si l'on ne considère que les croyances d'un agent. Cette section présente une méthode de fusion, basée sur l'opérateur d'agrégation *somme*, lorsque les agents partagent une même échelle pour évaluer la pertinence de leurs croyances.

Considérons un multi-ensemble $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ contenant n bases de croyance et μ une formule propositionnelle représentant les contraintes d'intégrité à satisfaire. Le but d'un opérateur de fusion sera, à partir de cet ensemble E , d'ordonner les différentes interprétations de Ω en fonction de toutes les informations données par les agents. Nous

noterons \triangleleft^E un tel ordre. À partir de cet ordre, nous pouvons représenter les croyances collectives issues de E , notées Δ^E , comme étant les interprétations *minimales* de \triangleleft^E . Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature pour générer \triangleleft^E , la plupart basée sur des opérateurs d'agrégations telle la somme ou le maximum [10, 12, 13].

Afin de calculer l'ordre \triangleleft^E , résultat de la fusion, nous associons à chaque interprétation un *profil*, noté $\nu_E(\omega)$, et défini par :

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle$$

Ce profil représente la cohérence de l'interprétation ω vis-à-vis de chacune des bases de croyance. Le point de départ de cet article est un opérateur basé sur la somme et dont nous notons le résultat \triangleleft_Σ^E . Le calcul de cet ordre repose sur l'agrégation des profils au moyen de l'opérateur somme. Puis les éléments de Ω sont ordonnés en fonction de cette agrégation : plus la somme est petite, plus elle est représentative de E . Plus formellement :

Définition 3 (\triangleleft_Σ^E) Soient ω et ω' deux interprétations de Ω . Soient $\nu_E(\omega)$ et $\nu_E(\omega')$ leur profil respectif. Alors :

$$\omega \triangleleft_\Sigma^E \omega' \text{ ssi } \Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega')).^1$$

Les modèles du résultat de la fusion, $\Delta_\Sigma^\mu(E)$, sont les modèles de μ qui sont minimaux relativement à \triangleleft_Σ^E . Plus formellement :

$$\text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E)) = \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \triangleleft_\Sigma^E)$$

Exemple 2 Considérons $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ avec $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$, $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$ et $B_3 = \{(\neg a, 5)\}$. Supposons que $\mu \equiv \neg a \vee \neg b$. Chaque profil associé à une interprétation est donnée par la Table 2, d'où l'on peut déduire que le résultat de la fusion est $\text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E)) = \{\omega_1\}$.

$\omega \in \Omega$	a	b	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
ω_0	0	0	$\langle 6, 3, 0 \rangle$	9
ω_1	0	1	$\langle 6, 1, 0 \rangle$	7
ω_2	1	0	$\langle 3, 0, 5 \rangle$	8
ω_3	1	1	$\langle 0, 1, 5 \rangle$	6

TABLE 2 – Profils associés à chaque interprétation

1. avec $\Sigma(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega)$

L'opérateur de fusion basé sur la somme est dépendant de la majorité. En particulier, la répétition d'une information influe sur le résultat de la fusion. Ce comportement est particulièrement adapté lorsque les croyances des agents sont indépendantes et que ceux-ci sont de fiabilité équivalente.

3 Extension de l'opérateur basé sur la somme au cas incommensurable

L'opérateur de fusion basé sur la somme défini précédemment repose sur une hypothèse forte : l'agrégation des différents poids par la somme impose que les poids soient commensurables. En d'autres termes, les agents doivent posséder les mêmes échelles d'évaluation de la pertinence de leurs informations. Lorsque ces poids représentent des utilités ou des gains, cette hypothèse se justifie totalement. Mais lorsque ces poids proviennent de sources hétérogènes, dont les qualités intrinsèques diffèrent et sont inconnues (on pourrait prendre l'exemple d'informations tirées du web, des témoignages de personnes dont on ne sait pas si elles ont assisté à la scène ou encore des domaines demandant une forte expertise), cette hypothèse n'a pas de sens. C'est pourquoi, nous présentons dans cette section une approche basée sur les échelles compatibles permettant de traiter ce cadre de fusion incommensurable.

3.1 Un approche basée sur les échelles compatibles

Une approche naturelle et prudente repose sur l'utilisation de l'ensemble des échelles compatibles [2]. Cette méthode affecte de nouveaux poids aux différentes informations contenues dans les différentes bases de croyance, tout en maintenant l'ordre à l'intérieur de chaque base. Plus formellement :

Définition 4 (Échelles compatibles) Une échelle compatible \mathcal{S} est une fonction qui associe à $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ un nouveau multi-ensemble $E^{\mathcal{S}} = \{B_1^{\mathcal{S}}, \dots, B_n^{\mathcal{S}}\}$ tel que pour tout $B_i \in E$:

- (i) $B_i^{\mathcal{S}} = \{(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij})) : (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\}$
- (ii) $\forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \forall (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i, R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ij'}) \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \leq \mathcal{S}(\varphi_{ij'})$.

Nous illustrons ce concept par l'exemple suivant.

Exemple 3 Considérons l'ensemble des bases de croyance $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ traitées précédemment dans l'exemple 2. Le tableau 3 fournit trois nouvelles échelles : $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et \mathcal{S}_3 .

	φ_{ij}	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_1(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_2(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_3(\varphi_{ij})$
B_1	a	6	2	6	1
	b	3	1	4	5
B_2	$a \vee b$	3	2	3	3
	$\neg b$	1	1	2	1
B_3	$\neg a$	5	1	4	5

TABLE 3 – Exemples d'échelles compatibles

Les échelles \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont compatibles, car elles préservent l'ordre initial des informations contenues dans les bases. À l'opposé, \mathcal{S}_3 n'est pas compatible car elle inverse les priorités de B_1 .

L'ensemble des échelles compatibles avec E est noté \mathbb{S}_E . Notons que \mathbb{S}_E n'est jamais vide, le plus simple étant de considérer l'échelle qui ne change pas les poids initiaux. Si l'on considère une échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, la base de croyance obtenue à partir de B_i en utilisant \mathcal{S} est notée $B_i^{\mathcal{S}}$. Plus formellement, $B_i^{\mathcal{S}}$ est obtenue en remplaçant chaque paire $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$ par $(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij}))$. Enfin, $E^{\mathcal{S}}$ représente le multi-ensemble obtenu en appliquant \mathcal{S} à chacune des B_i appartenant à E .

Définition 5 (\triangleleft_{Σ}^E) Soient ω et ω' deux interprétations de Ω . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$$

avec $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$ le résultat de l'application de la définition 3 sur $E^{\mathcal{S}}$.

Comme définis précédemment, les modèles de $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}(E)$ sont :

$$Mod(\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}(E)) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{\Sigma}^E)$$

Exemple 4 Considérons à nouveau $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$, $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$ et $B_3 = \{(\neg a, 5)\}$. La table 4 contient les profils associés à chaque interprétations de \mathcal{L} . Si l'on considère $\mu \equiv \top$, les éléments en gras représentent les modèles de $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_i})$ pour une échelle donnée \mathcal{S}_i . Par exemple, ω_2 et ω_3 sont modèles de $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_1})$ pour \mathcal{S}_1 .

$\omega \in \Omega$	a	b	$\nu_{E^{S_1}}(\omega)$	Σ_{S_1}	$\nu_{E^{S_2}}(\omega)$	Σ_{S_2}
ω_0	0	0	$\langle 2, 2, 0 \rangle$	4	$\langle 6, 3, 0 \rangle$	9
ω_1	0	1	$\langle 2, 1, 0 \rangle$	3	$\langle 6, 2, 0 \rangle$	8
ω_2	1	0	$\langle 1, 0, 1 \rangle$	2	$\langle 4, 0, 4 \rangle$	8
ω_3	1	1	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	2	$\langle 0, 2, 4 \rangle$	6

TABLE 4 – Profils associés

3.2 Caractérisation du résultat de la fusion incommensurable

En l'absence de borne supérieure, il est impossible de considérer l'ensemble des échelles compatibles. C'est pourquoi nous caractérisons dans cette section le résultat de la fusion basée sur les échelles compatibles en terme d'ordre sur les interprétations.

Tout d'abord, considérons la proposition suivante qui montre qu'une interprétation ω est modèle de $\Delta_\Sigma^\mu(E)$ si et seulement si il existe une échelle compatible pour laquelle ω est modèle de la fusion commensurable $\Delta_\Sigma^\mu(E^S)$. Plus formellement :

Proposition 1 Soit E un multi-ensemble de bases de croyance. Une interprétation $\omega \in \text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E))$ si et seulement si il existe une échelle compatible $S \in \mathbb{S}_E$ telle que $\omega \in \text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E^S))$.

Cette proposition peut être généralisée en traitant globalement l'ordre \triangleleft_Σ^E et non plus seulement ses éléments minimaux. Ce critère s'avère être un critère de Pareto [15].

Proposition 2 Soient ω et ω' deux interprétations de Ω . Alors $\omega \triangleleft_\Sigma^E \omega'$ si et seulement si :

- (i) $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$ et
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$.

La première condition signifie que ω est au moins aussi préférée que ω' dans chacune des bases initiales et la seconde condition stipule que ω est strictement préférée à ω' dans au moins une base.

4 Comportement logique et postulats de rationalité

Afin de caractériser les opérateurs de fusion, des postulats ont été proposés dans la littérature, les

plus connus provenant de [10]. Cependant, ces postulats ont été proposés dans un cadre différent, où les croyances des agents sont représentées uniquement à l'aide de formules propositionnelles. Nous avons donc adapté ces postulats à notre propos [2], afin qu'ils puissent traiter des bases de croyance contenant des formules pondérées.

- (IC0) $\Delta^\mu(E) \models \mu$;
- (IC1) Si μ est cohérent, alors $\Delta^\mu(E)$ est cohérent ;
- (IC2*) Si $\bigwedge_{B \in E} B^*$ est cohérent avec μ , alors $\Delta^\mu(E) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$;
- (IC3*) Si $E_1 \equiv_R E_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\Delta^{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta^{\mu_2}(E_2)$;
- (IC4*) Si $B_1^* \models \mu$ et $B_2^* \models \mu$, alors $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1^*$ est cohérent ssi $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2^*$ est cohérent ;
- (IC5) $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2) \models \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)$;
- (IC6) Si $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$ est cohérent, alors $\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$;
- (IC7) $\Delta^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$;
- (IC8) Si $\Delta^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$.

D'autres postulats, capturant d'autres comportements, ont également été proposés dans [10] :

- (IC6') Si $\Delta^\mu(E_1) \wedge \Delta^\mu(E_2)$ est cohérent, alors $\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta^\mu(E_1) \vee \Delta^\mu(E_2)$;
- (MAJ) $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^\mu(E \sqcup B_i^m) \models B_i^*$, (avec $B_i^m = \{B_i\} \sqcup \dots \sqcup \{B_i\}$ m fois et \sqcup l'union multi-ensembliste) ;
- (MI) $\forall m, \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2^m) \equiv \Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

Le postulat (MAJ) caractérise les opérateurs majoritaire : si un nombre suffisamment grand d'agents ont les mêmes croyances, alors ces croyances doivent être acceptées collectivement. À l'opposé, le postulat d'indépendance à la majorité stipule que le résultat de la fusion est totalement indépendant de la répétition des croyances des agents. La fusion obtenue dans ce cas est alors plus robuste, mais également moins intuitive. Le postulat (IC6') est quant à lui un affaiblissement de (IC6). Enfin nous introduisons un dernier postulat, original, dit de consensus, qui stipule que si toutes les bases sont cohérentes avec la contrainte μ , alors le résultat de la fusion contient au moins un modèle préféré pour chacune des bases.

- (CSS) $\forall B_i \in E$, si $B_i^* \models \mu$, alors $B_i^* \wedge \Delta^\mu(E)$ est cohérent.

Ce postulat généralise le postulat de tempérance proposé dans [7].

4.1 Le cas commensurable

Nous étudions dans cette section l'opérateur basé sur la somme dans le cas commensurable Δ_Σ^μ . Il s'avère que celui-ci vérifie la plupart des postulats :

Proposition 3 Δ_Σ^μ satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2*)**, **(IC3*)**, **(IC5)**, **(IC6)**, **(IC6')**, **(IC7)**, **(IC8)** et **(MAJ)**.

Cependant, Δ_Σ^μ falsifie **(IC4*)**, **(MI)** et **(CSS)**. Le fait que Δ_Σ^μ falsifie **(MI)** et **(CSS)** est attendu, puisqu'il vérifie **(MAJ)**.

L'exemple suivant montre que Δ_Σ^μ ne peut pas satisfaire **(IC4*)** :

Exemple 5 Considérons deux base de croyance $B_1 = \{(\neg a, 2), (b, 1)\}$ et $B_2 = \{(a, 3), (b, 2)\}$, et un contrainte d'intégrité $\mu = a \vee b$.

En considérant $E = \{B_1, B_2\}$, nous avons $B_1 \models \mu$ et $B_2 \models \mu$. De la table 5, en considérant toujours $\mu = a \vee b$, nous obtenons que $\text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E)) = \{\omega_3\}$, et donc que $\Delta_\Sigma^\mu(E) \equiv a \wedge b$. Ainsi, sur cet exemple, $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2^*$ est cohérent, mais $\Delta^\mu(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1^*$ ne l'est pas, ce qui contrevient bien au postulat **(IC4*)**.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
ω_0	0	0	1	3	$\langle 1, 3 \rangle$	4
ω_1	0	1	0	3	$\langle 0, 3 \rangle$	3
ω_2	1	0	2	2	$\langle 2, 2 \rangle$	4
ω_3	1	1	2	0	$\langle 2, 0 \rangle$	2

TABLE 5 – Profils associés pour l'exemple 5

4.2 Le cas incommensurable

Lorsqu'on considère l'opérateur basé sur la somme adapté au cadre incommensurable, le comportement diffère de celui défini pour le cas commensurable. En particulier, de dernier devient indépendant de la majorité et il devient même consensuel.

Proposition 4 $\Delta_\Sigma^{\mu_1}(E)$ satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2*)**, **(IC3*)**, **(IC4*)**, **(IC5)**, et **(IC7)**.

En revanche, Δ_Σ^μ falsifie **(IC6)**, **(IC6')**, **(IC8)**, et **(MAJ)**. Nous fournissons un contre-exemple pour **(IC6)**.

Exemple 6 Considérons $\mu = \top$, $E_1 = \{B_1 = \{(a, 1)\}, B_2 = \{(\neg a, 1)\}\}$ et $E_2 = \{B_3 = \{(a, 1)\}\}$. La table 6 contient les profils associés à chaque interprétation pour $\Delta_\Sigma^\mu(E_1)$, $\Delta_\Sigma^\mu(E_2)$ et $\Delta_\Sigma^\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

	a	b	$\nu_{E_1}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$
ω_0	0	0	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1, 0, 1 \rangle$
ω_1	0	1	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle 1, 0, 1 \rangle$
ω_2	1	0	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0, 1, 0 \rangle$
ω_3	1	1	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0 \rangle$	$\langle 0, 1, 0 \rangle$

TABLE 6 – Profils associés à $\Delta_\Sigma^\mu(E_1)$, $\Delta_\Sigma^\mu(E_2)$ et $\Delta_\Sigma^\mu(E_1 \sqcup E_2)$

Nous avons bien $\Delta_\Sigma^\mu(E_1) \equiv \top$ et $\Delta_\Sigma^\mu(E_2) \equiv a$. En outre, nous avons $\Delta_\Sigma^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$, mais $\Delta_\Sigma^\mu(E_1) \wedge \Delta_\Sigma^\mu(E_2) \equiv a$. Ainsi, **(IC6)** n'est pas satisfait car $\Delta_\Sigma^\mu(E_1) \wedge \Delta_\Sigma^\mu(E_2)$ est cohérent, mais $\Delta_\Sigma^\mu(E_1 \sqcup E_2) \not\models \Delta_\Sigma^\mu(E_1) \wedge \Delta_\Sigma^\mu(E_2)$.

La non-satisfaction de **(IC8)** est due au fait que lorsqu'on considère des échelles incommensurables, Δ_Σ^E n'est qu'un ordre partiel. À titre illustratif, l'opérateur basé sur l'inclusion ensembliste (qui est un ordre partiel très particulier) proposé dans [6], ne satisfait pas **(IC8)** non plus.

Proposition 5 $\Delta_\Sigma^\mu(E)$ satisfait **(MI)** et **(CSS)**.

Pour ce qui est de la majorité, l'opérateur incommensurable basé sur la somme devient consensuel et indépendant de la majorité : l'opérateur devient donc d'un certain point de vue égalitariste, alors qu'il était utilitariste dans sa version commensurable.

5 Restrictions des échelles compatibles

Considérer l'ensemble des échelles compatibles produit un résultat prudent. Mais il repose sur l'hypothèse forte d'incommensurabilité, justifié par l'absence d'informations permettant de sélectionner un sous-ensemble d'échelles compatibles. Le but de cette section est d'affaiblir l'hy-

pothèse d'incommensurabilité et donc de limiter cette notion dans le but d'obtenir des ensembles d'échelles compatibles plus restreints. Nous avons pour cela besoin de définir des classes d'incommensurabilité qui peuvent être découpées ainsi :

- la classe des échelles bornées $S^{(p)}$: le plus grand poids associé à une échelle ne peut dépasser un seuil fixé, représenté par un entier positif p . Cette classe empêche de considérer des poids arbitrairement grands.
- la classe des échelles linéaires S^l : cette classe maintient la proportion entre les poids à une constante translatrice près ;
- la classe des échelles proportionnelles S^w : cette classe maintient la proportion entre les poids d'une source donnée ;
- la classe des échelles translatives S^s : cette classe maintient la distance entre les différents poids pour une source donnée, seule la distance des poids à 0 peut être augmentée.

La table 7 donne une définition formelle de chacune de ces restrictions.

Classe	Notation	$\{S \text{ t.q. } \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i : \dots\}$
Bornée	$S^{(p)}$	$\mathcal{S}(\varphi) \leq p$
Linéaire	S^l	$\mathcal{S}(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi) + b_i$ avec $a_i > 0, b_i \geq 0$
Proport.	S^w	$\mathcal{S}(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi)$ avec $a_i > 0$
Translative	S^s	$\mathcal{S}(\varphi) = R_{B_i}(\varphi) + b_i$ avec $b_i \geq 0$

TABLE 7 – Différentes classes d'échelles compatibles

Les échelles bornées font réellement sens, puisque dans les cas pratiques la taille des poids est finie. Étant donné un ensemble de base de croyance, la plus petite borne p possible est $p_{min} = \max\{|B_i| : B_i \in E\}$, avec $|B_i|$ représentant le nombre des différents rangs de B_i . Si $p < p_{min}$, alors l'ensemble des échelles compatible est vide.

La classe des échelles translatives quant à elle maintient les distances entre les différents poids. En effet, quelque soit l'échelle translatrice considérée, $\forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})), (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i$, nous avons :

$$\mathcal{S}(\varphi_{ij}) - \mathcal{S}(\varphi_{ij'}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}) - R_{B_i}(\varphi_{ij'}).$$

Les échelles proportionnelles sont obtenues en multipliant chaque poids $R_{B_i}(\varphi_{ij})$ d'une source

donnée par un entier strictement positif a_i . Dans ce cas, a_i peut être vu comme un degré de fiabilité de la source B_i et l'opérateur de fusion devient ainsi une somme pondérée. Enfin, la classe des échelles linéaires généralise les classes translatives et proportionnelles.

Un opérateur de fusion peut ainsi être obtenu à partir de chacune de ces classes. En effet, nous pouvons définir $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$ (resp $\blacktriangle_{\Sigma, S^l}^\mu$, $\blacktriangle_{\Sigma, S^w}^\mu$, et $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$) comme étant les ordres issus de la définition 5 en remplaçant \mathbb{S} par $S^{(p)}$ (resp. S^l , S^w , and S^s).

Nous analysons dans les section suivantes l'impact de ces différentes restrictions sur la prudence et la productivité de ces opérateurs de fusion ainsi que leur comportement vis-à-vis des postulats de rationalité.

5.1 Impact sur les inférences

Le premier résultat surprenant est que la restriction des échelles compatibles aux classes affines et linéaires n'affecte pas le résultat de la fusion.

Proposition 6 Soient ω, ω' deux interprétations de Ω . Alors :

$$\omega \blacktriangle_{\Sigma, S_E^l}^E \omega' \text{ ssi } \omega \blacktriangle_{\Sigma, S_E^w}^E \omega' \text{ ssi } \omega \blacktriangle_{\Sigma}^E \omega'.$$

En revanche, l'inférence basée sur les échelles bornées est en général plus productive que $\blacktriangle_{\Sigma}^\mu$. Mais cette inférence dépend fortement du choix de p . En particulier, si l'on choisit une valeur particulière de p , l'opérateur de fusion standard basé sur la somme peut être recouvert dans certains cas bien précis :

Proposition 7 Supposons que E contiennent des bases de croyance qui renferment exactement le même nombre de rangs, p_0 . Supposons également que le poids maximal des différents B_i soit p_0 . Dans ce cas $\forall \omega, \omega' \in \Omega$:

$$\omega \blacktriangle_{\Sigma, S_E^{(p_0)}}^E \omega' \text{ ssi } \omega \blacktriangle_{\Sigma}^{E^{p_0}} \omega'$$

Si l'on considère plus précisément l'inférence basée sur les translations, elle est également en général plus productive que $\blacktriangle_{\Sigma}^\mu$. Il est même possible d'exhiber un critère permettant de caractériser l'ordre induit par $\blacktriangle_{\Sigma, S_E^s}^E$, cette caractérisation étant décrite dans la proposition suivante.

Proposition 8 Soient ω, ω' deux interprétations de Ω . Alors $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega'$ si et seulement si :

- (i) $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$ et
- (ii) $\forall B_i : \omega' \models B_i, \omega \models B_i$.

Le premier critère stipule que la somme des éléments du profil associé à ω doit être inférieure à la somme des éléments du profil associé à ω' , tandis que le second critère précise que ω doit également être modèle des bases dont ω' est modèle.

L'ensemble des relations liant les différents opérateurs est repris et complété par la figure 1.

5.2 Impact vis-à-vis des postulats de rationalité

La table 8 synthétise le comportement des opérateurs précédemment définis vis-à-vis des postulats de rationalité traitant de majorité ou de consensus. Nous avons également comme résultats complémentaires $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$ et $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$ qui satisfont tous deux (IC0), (IC1), (IC2*), (IC3*), (IC5), et (IC7).

	(IC4*)	(IC6)	(IC8)	(MAJ)	(MI)	(CSS)
Δ_Σ^μ	-	✓	✓	✓	-	-
$\blacktriangle_\Sigma^\mu$	✓	-	-	-	✓	✓
$\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$	✓	-	-	-	✓	✓
$\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$	✓	-	-	✓	-	-

TABLE 8 – Synthèse des comportements logiques

La principale raison du comportement non-majoritaire de $\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)$ tient au fait que les nouveaux poids associés par les échelles compatibles ne sont pas bornés. Par exemple, supposons qu'une base B_1 contienne φ et qu'une autre base B_2 contienne $\neg\varphi$. Comme les échelles compatibles ne sont pas bornées, même si B_1 est répétée m fois, il sera toujours possible de construire une échelle compatible avec des poids au moins m fois plus élevés pour B_2 (et donc pour $\neg\varphi$), ce qui bloquera l'inférence de φ . C'est aussi pourquoi $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$ vérifie (MAJ), au contraire des autres opérateurs.

Cependant, Δ_Σ^μ satisfait la plupart des postulats de rationalité, à l'exception des postulats d'équité et de consensus, (IC4*) et (CSS). Une

question peut néanmoins se poser : peut-on sélectionner une seule échelle compatible qui permette de satisfaire à la fois (IC4*) et (CSS) ? La réponse est négative dans le cas général, sauf dans des cas très particuliers, comme celui décrit par la proposition suivante.

Proposition 9 Soit $E = \{B_1, B_2\}$ tel que $B_1 = (\varphi, R_{B_1}(\varphi))$ et $B_2 = (\varphi', R_{B_2}(\varphi'))$. Soit S une échelle compatible avec E , alors : $\Delta_{\Sigma, S}^\mu$ vérifie (IC4*) et (CSS) ssi $S(\varphi) = S(\varphi')$.

Mais comme nous l'avons précédemment indiqué, dans le cas général, il n'y a aucun espoir de satisfaire à la fois (IC4*) et (CSS) en utilisant une seule échelle compatible.

Proposition 10 Il n'existe pas d'échelle compatible telle que $\Delta_{\Sigma, S}^\mu$ satisfasse les postulats d'équité et de consensus pour un E donné :

$$\exists E, \forall S \text{ t.q. } \Delta_{\Sigma, S}^\mu \text{ falsifie (IC4*) ou (CSS).}$$

Comme contre-exemple, il est possible de considérer $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ avec $B_1 = \{(a \wedge c, 1)\}$, $B_2 = \{(\neg a, 1)\}$, et $B_3 = \{(\neg c, 1), (a, 2)\}$.

6 Étude comparative d'un point de vue des inférences

Cette section étudie comparativement les opérateurs de fusion précédemment définis entre eux, mais aussi avec d'autres, du point de vue de la productivité et de la prudence des différentes relations d'inférence.

Par exemple, considérons les opérateurs basés sur le maximum $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$ (resp. $\Delta_{Max}^\mu(E)$) pour le cas commensurable) définis exactement comme $\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)$ (resp. $\Delta_\Sigma^\mu(E)$) donné par la définition 5 (resp. la définition 3), excepté le fait que l'opérateur d'agrégation somme Σ est remplacé par l'opérateur d'agrégation Max (pour plus de détails, voir [2]). Il est bien connu, dans le cadre commensurable, que les opérateurs de fusion basés sur la somme et sur le maximum sont incomparables en terme de conclusions. En revanche, dans le cas incommensurable, ces deux opérateurs sont comparables, puisque nous avons une relation d'inclusion stricte entre ces deux relations d'inférence :

$$\blacktriangle_\Sigma^\mu(E) \models \blacktriangle_{Max}^\mu(E).$$

Une autre façon d'aborder la fusion de bases de croyance incommensurables est de voir l'ensemble E comme une base unique de croyance partiellement ordonnée $(K^E, <_{K^E})$, avec K^E un multi-ensemble contenant toutes les formules de E et $<_{K^E}$ défini par : $\varphi_{ij} <_{K^E} \varphi_{ik}$ ssi $\exists B_i \in E$ tel que $\varphi_{ij} \in B_i$, $\varphi_{ik} \in B_i$ et $R_{B_i}(\varphi_{ij}) < R_{B_i}(\varphi_{ik})$. Dans ce cas, le résultat de la fusion devient une sélection de modèles préférés. Pour ce faire, la méthode basée sur l'inclusion définie dans [3] et rappelée ici peut être utilisée :

Définition 6 Une interprétation ω est dite *Incl-préférée* à une interprétation ω' , noté $\omega \triangleleft_E^{Incl} \omega'$, si et seulement si : $\forall \varphi \in K^E$ t.q. $\omega \models \varphi$ et $\omega' \models \varphi$, $\exists \psi \in K^E$ t.q. $\omega \models \psi$ et $\omega' \not\models \psi$ et $\psi <_{K^E} \varphi$.

Ceci nous permet maintenant de définir directement un opérateur de révision Δ_{Incl}^μ basé sur \triangleleft_E^{Incl} . Les modèles de cette fusion seront les modèles minimaux pour \triangleleft_E^{Incl} :

$$Mod(\Delta_{Incl}^\mu(E)) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_E^{Incl}).$$

La proposition suivante stipule que si chaque base possède un seul élément, alors Δ_{Incl}^μ et $\blacktriangle_\Sigma^\mu$ mènent au même résultat.

Proposition 11 Supposons que chaque B_i contienne exactement une formule. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{L}$,

$$\Delta_{Incl}^\mu(E) \models \varphi \text{ ssi } \blacktriangle_\Sigma^\mu(E) \models \varphi$$

Cette proposition montre une fois de plus la différence de comportement de l'opérateur de fusion basé sur la somme dans le cas incommensurable. En effet, dans le cas commensurable, si chaque base ne possède qu'une seule formule pondérée à 1, alors l'opérateur basé sur la somme est plus productif que l'approche basée sur l'inclusion. En revanche, si les bases de croyance B_i contiennent plus d'une formule, $\Delta_{Incl}^\mu(E)$ et $\Delta_\Sigma^\mu(E)$ redeviennent incomparables en terme de conclusions. Nous illustrons ceci à l'aide de l'exemple suivant :

Exemple 7 Considérons $E_1 = \{B_1, B_2, B_3\}$ tel que $B_1 = \{(a \wedge b, 1)\}$, $B_2 = \{(\neg a \wedge b, 1)\}$ et $B_3 = \{(a, 1)\}$. L'opérateur basé sur la

somme va conclure $\{a\}$, contrairement à celui basé sur l'inclusion. Considérons maintenant $E_2 = \{B_1, B_2\}$ avec $B_1 = \{(b, 2), (a, 1)\}$ et $B_2 = \{(\neg a, 2)\}$. Cette fois-ci, l'opérateur basé sur l'inclusion déduit $\{b\}$, ce que ne déduira pas l'opérateur basé sur la somme.

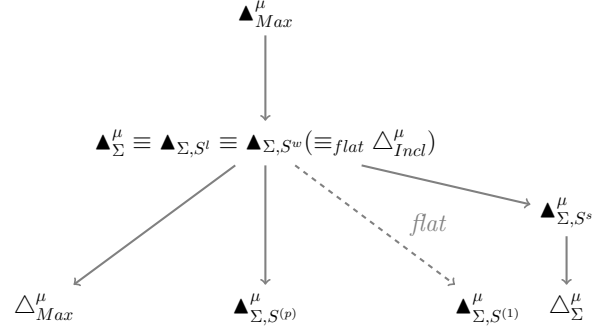


FIGURE 1 – Productivité et prudence des différents opérateurs proposés

La figure 1 présente une synthèse de l'ensemble des liens de tous les opérateurs présentés dans cet article en terme de productivité et de prudence d'inférence. La flèche $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ signifie que le résultat de la fusion Δ_1 peut être inféré par Δ_2 . Le cas de bases de croyance ne possédant qu'une seule formule est aussi représenté. Dans ce cas, Δ_{Incl}^μ est plus prudent que la version bornée avec $p = 1$. En fait, dans ce cas, nous retrouvons l'inférence lexicographique [1, 11].

7 Conclusion

Cet article a analysé en détail différentes déclinaisons de l'opérateur de fusion basé sur la somme dans le cadre incommensurable. Nous avons proposé plusieurs caractérisations du résultat de ces opérateurs en terme d'ordre de Pareto et d'échelles compatibles. Nous avons également étudié le comportement de cet opérateur et nous avons montré que son comportement diverge dans le cas incommensurable : l'opérateur somme n'est plus dans ce cas un opérateur majoritaire. De surcroît, nous avons analysé différentes restrictions sur les échelles compatibles en définissant différentes classes. Par exemple les échelles bornées permettent de retrouver la propriété de majorité. En outre, nous avons considéré le postulat d'équité (IC4*) et le nouveau postulat de consensus présenté dans cet article, (CSS). En particulier, nous avons montré l'impossibilité de ne sélectionner qu'une

seule échelle compatible et de satisfaire ainsi ces deux postulats en même temps. Enfin, nous avons comparé les différentes relations d'inférence d'un point de vue de productivité et de prudence afin d'obtenir un panorama extrêmement complet des comportements d'opérateurs basés sur la somme lorsque l'hypothèse de commensurabilité ne tient plus. Cependant, diverses questions demeurent, en particulier l'existence d'une caractérisation complète en terme de postulats des différents opérateurs proposés ou encore la complexité théorique des méthodes de fusion définies.

Références

- [1] Salem Benferhat, Claudette Cayrol, Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, 1993.
- [2] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. Maximum-based merging of incommensurable ranked belief bases. In *Proceedings of the 22th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.
- [3] Gerhard Brewka. Preferred subtheories : an extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.
- [4] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [5] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Conflict-based merging operators. In *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 348–357, 2008.
- [6] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. A diff-based merging operator. In *Proceedings of the 12th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'08)*, pages 19–25, 2008.
- [7] Patricia Evraere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Propositional merging operators based on set-theoretic closeness. In *Proceedings of the 18th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, pages 737–738. IOS Press, 2008.
- [8] Qi Guilin, Weiru Liu, and David A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356, july 2006.
- [9] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. DA² merging operators. *Journal of Logic and Computation*, 157(1-2) :49–79, 2004.
- [10] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.
- [11] Daniel J. Lehmann. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 15(1) :61–82, 1995.
- [12] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration : A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the 2nd World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.
- [13] Jinxin Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2) :363–378, 1996.
- [14] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.
- [15] Hervé Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- [16] Peter Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.
- [17] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.
- [18] Mary-Anne Williams. Iterated theory base change : a computational model. In *Proceedings of 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541–1547, 1995.